Örnek: $a=\ln 2$, $b=\ln 3$, $c=\ln 5$ ise $\ln 1080$ in a,b,c cinsinden değerini bulalım.

$$\ln 1080=\ln(2^3 3^3 5)=\ln 2^3+\ln 3^3+\ln 5=3\ln 2+3\ln 3+\ln 5$$
$$=3a+3b+c$$

Örnek: $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$\frac{x-1}{x+1}>0 \Rightarrow$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow$ ÇK$=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Örnek: $5^{\ln x}+5^{1-\ln x}=6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$5^{\ln x}+\frac{5}{5^{\ln x}}-6=0$. $5^{\ln x}=t$ olsun.

$\Rightarrow t+\frac{5}{t}-6=0 \Rightarrow t^2-6t+5=0 \Rightarrow (t-5)(t-1)=0$

$\Rightarrow t=5,\ t=1 \Rightarrow 5^{\ln x}=5,\ 5^{\ln x}=1 \Rightarrow \ln x=1,\ \ln x=0$

$\Rightarrow x=e\ ,\ x=1 \Rightarrow$ ÇK$=\{1,e\}$.

Hiperbolik fonksiyonlar

Simetrik bir küme üzerinde tanımlanan her fonksiyonu biri çift diğeri tek olan iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edebiliriz. Gerçekten de

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\ ,\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

olmak üzere

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g(-x)=g(x)$ ve $h(-x)=-h(x)$ olup g çift, h ise tek fonksiyondur.

Tanım: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ fonksiyonunun çift kısmına yani $\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik kosinüs fonksiyonu, tek kısmına, yani $\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna da hiperbolik sinüs fonksiyonu denir. Böylece

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

şeklinde tanımlanır. Bunlardan yararlanarak

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

olarak tanımlanır.

Hiperbolik fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler vardır:

1) $e^x = \sinh x + \cosh x$ olduğundan $e^{nx} = (\sinh x + \cosh x)^n$ olur.

2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

3) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, 61

4) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

5) $\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$, $\coth^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$

6) $\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \sinh y \cosh x$

7) $\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$

Ters hiperbolik fonksiyonlar

$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, birebir ve örten fonksiyon olup tersi vardır

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^x - e^{-x} - 2y = 0$$

$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0$. $e^x = t$ dersek $t^2 - 2yt - 1 = 0$ olur.

Bu denklemin diskriminantı $\Delta = 4y^2 + 4$ olup kökler

$t_{1,2} = \frac{2y \mp \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \mp \sqrt{y^2+1}$. $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ olursa

$e^x > 0$ olduğu için $e^x \neq y - \sqrt{y^2+1}$ olur. O halde $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

olup $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ dir.

$$\Rightarrow \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Benzer işlemler yapılarak

$\cosh^{-1}: [1,\infty) \to [0,\infty)$, $\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$

$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x\notin[-1,1]$

olduğu gösterilebilir.

Örnek: $\text{sech}^{-1}x$ i bulalım.

$$y=\text{sech}x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \cosh x$$

$$\Rightarrow \cosh^{-1}\frac{1}{y} = x \Rightarrow \text{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$$

Benzer şekilde

$$\text{cosech}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x} \text{ ve } \coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek: $\sinh x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

$$\sinh x = 3 \Rightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{2} = 3 \Rightarrow e^x - e^{-x} - 6 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 6e^x - 1 = 0$$

$e^x = t$ dersek $t^2-6t-1=0 \Rightarrow \Delta = 40$, $t_{1,2} = \frac{6\mp\sqrt{40}}{2} = 3\mp\sqrt{10}$

$3-\sqrt{10}<0$ olduğu için $e^x \neq 3-\sqrt{10}$ olup $e^x = 3+\sqrt{10}$ olur.

$\Rightarrow x = \ln(3+\sqrt{10})$

Aynı problemi $\sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ olduğunu kullanarak

$$\sinh x = 3 \Rightarrow x = \sinh^{-1}3 = \ln(3+\sqrt{10})$$

olarak da çözebiliriz.

Örnek: $\sinh x = -\frac{3}{4}$ olduğuna göre $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\text{sech} x$, $\text{cosech} x$ değerlerini bulalım.

$$\cosh^2x - \sinh^2x = 1 \Rightarrow \cosh^2x = 1+\sinh^2x = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \cosh x = \frac{5}{4} \quad \left(\cosh x > 0 \text{ olacağı için } \cosh x \neq -\frac{5}{4}\right)$$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{-3/4}{5/4} = -\frac{3}{5}$, $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = -\frac{5}{3}$

$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{4}{5}$, $\text{cosech}\, x = \frac{1}{\sinh x} = -\frac{4}{3}$

Örnek: $2\cosh(\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$2\cosh(\ln x) = \cancel{2}\,\frac{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}{\cancel{2}} = x + e^{\ln\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x}$$

Örnek: $\sinh(2\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$\sinh(2\ln x) = \frac{e^{2\ln x}-e^{-2\ln x}}{2} = \frac{e^{\ln x^2}-e^{\ln x^{-2}}}{2} = \frac{x^2-x^{-2}}{2} = \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}$$

Örnek: $\ln(\cosh x+\sinh x)+\ln(\cosh x-\sinh x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$\cosh x+\sinh x = e^x$, $\cosh x-\sinh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2} = e^{-x}$

$\Rightarrow \ln(\cosh x+\sinh x)+\ln(\cosh x-\sinh x) = \ln e^x + \ln e^{-x} = x - x = 0$

Limit ve Süreklilik

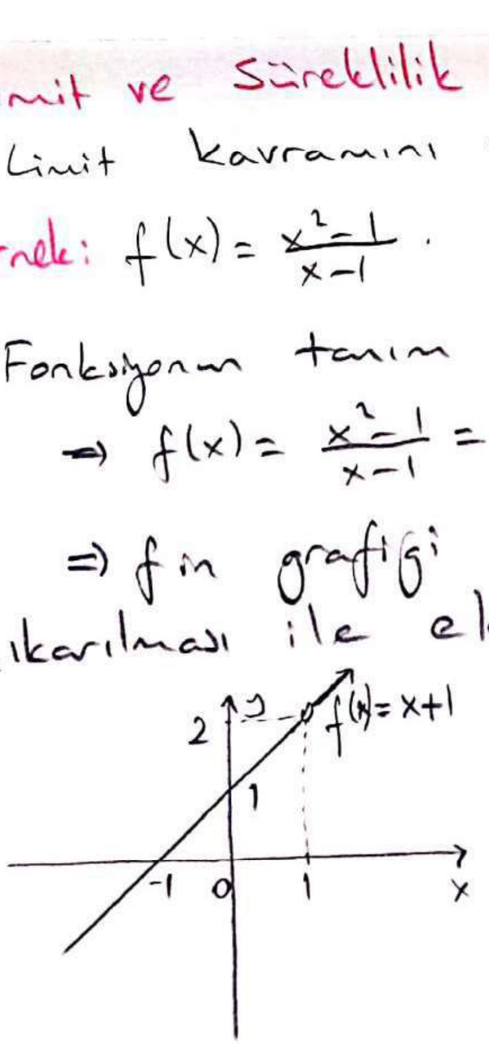
Limit kavramını vermeden önce şu örneği inceleyelim:

Örnek: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}-\{1\}$ dir.

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

$\Rightarrow f$ in grafiği $y=x+1$ doğrusundan $(1,2)$ noktasının çıkarılması ile elde edilir. Acaba fonksiyon $x=1$ de tanımlı olsaydı $f(1)$ değeri ne olurdu?



Bu soruya cevap verebilmek için 1 e çok yakın noktalarda f in değerine bakmalıyız.